

Capítulo 8

Vectores, listas, sistemas y matrices

Tabla de contenidos

Vectores	8-2
Cómo crear vectores	8-2
Matemática vectorial	8-4
Listas	8-6
Cómo crear una lista	8-6
Cómo trabajar con listas	8-7
Sistemas y matrices	8-8
Cómo crear sistemas	8-8
Cómo trasladarse rápidamente a través de un sistema	8-10
Cómo editar un sistema	8-10
Aritmética matricial	8-10

Por mayor información, diríjase a <http://www.hp.com/calculators/hp49>

Introducción

La HP 49G provee de varias herramientas para crear, manipular y analizar vectores, listas, sistemas y matrices. Pueden crearse vectores de cualquier dimensión, aplicar comandos a múltiples elementos en una lista y utilizar las matrices para especificar datos estadísticos y resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Este capítulo es solamente una breve introducción a los vectores, listas, sistemas y matrices. Una descripción completa de la funcionalidad de la HP 49G puede encontrarse en la Guía del Usuario Avanzado (*Advanced User's Guide*) en <http://www.hp.com/calculators/hp49>.

Vectores

Un vector es una forma de representar cantidades medidas tanto en magnitud como en dirección, por ejemplo la velocidad. Un vector se define como una lista ordenada de números, donde uno de ellos indica una magnitud y los otros la dirección.

La mayoría de las veces se estará trabajando con vectores bidimensionales y tridimensionales, aunque son posibles los de cualquier dimensión. La HP 49G le permite especificar y trabajar con vectores de cualquier dimensión.

Un vector bidimensional puede ser descrito en notación rectangular $[x, y]$ o en notación polar $[r, \theta]$. Para vectores tridimensionales, se puede utilizar la notación rectangular $[x, y, z]$, la cilíndrica $[r, \theta, z]$ o la esférica $[\rho, \theta, \phi]$. Todas estas notaciones se encuentran disponibles con la HP 49G.

Cómo crear vectores

Primero debe decidir qué notación utilizar, entre la rectangular, cilíndrica o esférica. La notación polar no está disponible como opción separada, sin embargo, debido a que ambas, la notación cilíndrica y la esférica son equivalentes a la polar en conjuntos bidimensionales, puede usted utilizar la notación polar al seleccionar la cilíndrica o la esférica.

Cómo seleccionar la notación vectorial

La notación actual está indicada por el indicador de coordenadas: XYZ indica notación rectangular, RZ indica notación cilíndrica y RZZ indica notación esférica. Debe seleccionar una nueva notación si la actual no es la que desea utilizar.

Método 1

1. Pulse \leftarrow (MTH) para seleccionar la aplicación MATHEMATICS.
2. Utilice las teclas flecha para resaltar VECTOR de la lista de opciones.
3. Pulse (F6) para seleccionar OK.
4. Resalte la notación que desea configurar: RECT. MODE para rectangular, CYLIND. MODE para cilíndrica, o SPHERICAL MODE para esférica.
5. Pulse (F6) para seleccionar OK.

Método 2

1. Pulse **(MODE)** para visualizar la plantilla de entrada *Modes* de la calculadora.
2. Configure el campo del Sistema de Coordenadas (*Coordinate System*) a la notación que desee. (Por información sobre cómo cambiar los campos en una plantilla de entrada, vea la página 2-11).
3. Pulse **(F6)** para **OK** y configurar la notación seleccionada.

Notación polar

Seleccione ya sea la notación cilíndrica o la esférica (vea arriba).

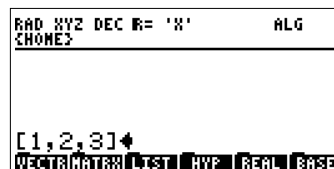
Cómo seleccionar una unidad angular

La unidad angular seleccionada actualmente está indicada por el indicador: **DEG** indica grados sexagesimales, **RAD** indica radianes (la configuración por defecto) y **GRD** indica grados centesimales. Si desea utilizar una notación vectorial que requiere de una medida angular cuya unidad actual no es la deseada, reconfigure la misma antes de introducir el vector. Por instrucciones para reconfigurar la unidad angular, vea “Cómo cambiar el modo” en la página 2-15.

Cómo introducir vectores

Se introduce un vector especificando sus componentes entre corchetes:

1. Pulse **([)]**.
2. Introduzca el primer componente.
3. Introduzca cada componente subsiguiente, separándolos con una coma y preceda un componente angular con el signo \angle . (El signo ángulo puede seleccionarse con la herramienta Caracteres, tal como se explica en el capítulo 2).
4. Pulse **(ENTER)**.



Puede también introducir un vector creando una matriz de fila única con *Matrix Writer* (Escritor de Matrices). Esto se explica más adelante en este capítulo.

Si la notación de coordenadas no corresponde con el elemento introducido, la HP 49G lo convierte a la notación. Por ejemplo: si introduce $[3 \angle 4]$, el vector se visualiza como $[2.99269 \ .20926]$ si la notación de coordenadas actual es la rectangular. Igualmente, $[3 \ 4]$ se muestra como $[5 \angle 53.13]$ si el ajuste actual es el de notación cilíndrica.

Matemática vectorial

Con la HP 49G se pueden sumar o restar dos vectores de la misma forma en que se suman o restan números reales. Por ejemplo: para sumar dos vectores, introduzca el primero, pulse \oplus , introduzca el segundo vector y pulse ENTER .

Se puede también multiplicar y dividir un vector por un escalar.

La HP 49G también dispone de un número de comandos especiales para trabajar con vectores. Tres de estos comandos (magnitud absoluta, producto *dot* y producto *cross*) se describen en detalle en las siguientes tres secciones.

Magnitud absoluta

La *magnitud absoluta* de un vector (también conocida por *magnitud escalar*) es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados del valor de cada elemento.

Para calcular la magnitud absoluta de $[1\ 2\ 4]$:

1. Pulse \leftarrow MTH para seleccionar la aplicación **MATHEMATICS**.
2. Utilice las teclas flecha para resaltar **VECTOR** en la lista de opciones.
3. Pulse F6 para seleccionar **OK**.
4. Resalte **ABS** (el comando de magnitud absoluta) de la lista de comandos vectoriales.
5. Pulse F6 para seleccionar **OK**.
6. Pulse \leftarrow \square
7. Introduzca $1\ \square\ 2\ \square\ 4$
8. Pulse ENTER .

El resultado es $\sqrt{21}$.

Un ejemplo donde se necesita calcular la magnitud absoluta es cuando se quiere encontrar el vector de unidades; que se encuentra dividiendo el vector dado por su magnitud:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$$

Suponga que quiera encontrar el vector de unidades de $[3\ 4]$:

1. Pulse \leftarrow \square $3\ \square\ 4\ \rightarrow$ para introducir el numerador.
2. Pulse \div .

3. Pulse \leftarrow $\boxed{\text{MTH}}$ para seleccionar la aplicación **MATHEMATICS**.
4. Utilice las tecla flecha para resaltar **VECTOR** en la lista de opciones.
5. Pulse $\boxed{\text{F6}}$ para seleccionar **OK**.
6. Resalte **ABS** (el comando de magnitud absoluta) de la lista de comandos vectoriales.
7. Pulse $\boxed{\text{F6}}$ para seleccionar **OK**.
8. Pulse \leftarrow $\boxed{\text{[]}}$ 3 $\boxed{\text{[]}}$ 4 \rightarrow para completar el denominador.
9. Pulse $\boxed{\text{ENTER}}$ para obtener el vector de unidades, que en este caso es $[\frac{3}{5} \frac{4}{5}]$.

Producto *dot* (punto)

El *producto de puntos* de dos vectores de iguales dimensiones (o sea, con la misma cantidad de filas y columnas) es la suma de los productos de cada par de elementos correspondientes. El producto de puntos es conocido también como *producto interno* o *escalar*.

Para encontrar el producto de puntos de $[2 \ -3 \ 4]$ y $[-1 \ 2 \ 8]$:

1. Pulse \leftarrow $\boxed{\text{MTH}}$ para seleccionar la aplicación **MATHEMATICS**.
2. Utilice las teclas tecla para resaltar **VECTOR** en la lista de opciones.
3. Pulse $\boxed{\text{F6}}$ para seleccionar **OK**.
4. Resalte **DOT** (el comando producto de puntos) de la lista *vector commands* (comandos vectoriales).
5. Pulse $\boxed{\text{F6}}$ para seleccionar **OK**.
6. Pulse \leftarrow $\boxed{\text{[]}}$ para seleccionar un par de paréntesis.
Los paréntesis son necesarios ya que está por introducir un conjunto de argumentos (en este caso, los dos vectores).
7. Pulse \leftarrow $\boxed{\text{[]}}$ para introducir un par de corchetes, para encerrar su primer vector.
8. Introduzca 2 $\boxed{\text{[]}}$ 3 $\boxed{\text{+/-}}$ $\boxed{\text{[]}}$ 4.
9. Pulse \rightarrow para mover el cursor fuera de los corchetes indicando, por lo tanto, que el primer vector está completo.
10. Pulse \leftarrow $\boxed{\text{[]}}$ para indicar el final del primer argumento.
11. Pulse \leftarrow $\boxed{\text{[]}}$ para ingresar un par de corchetes para encerrar el segundo vector.
12. Introduzca 1 $\boxed{\text{+/-}}$ $\boxed{\text{[]}}$ 2 $\boxed{\text{[]}}$ 8.
13. Pulse $\boxed{\text{ENTER}}$ para devolver el producto de puntos de los dos vectores, en este caso, 24.

Producto *cross* (cruz)

Para dos vectores $[a \ b \ c]$ y $[d \ e \ f]$, el producto de cruces es $[(bf - ce) \ (cd - af) \ (ae - bd)]$. El *producto de cruces* de dos vectores es también conocido como *producto vectorial* o *externo*.

Para encontrar el producto de cruces de $[2 \ 3 \ 4]$ y $[1 \ 5 \ 6]$:

1. Pulse \leftarrow (MTH) para seleccionar la aplicación MATHEMATICS.
2. Utilice las teclas flecha para resaltar VECTOR en la lista de opciones.
3. Pulse (F6) para seleccionar OK.
4. Resalte CROSS (el comando producto de cruces) de la lista de comandos vectoriales.
5. Pulse (F6) para seleccionar OK.
6. Pulse \leftarrow (()) para introducir un par de paréntesis.
7. Introduzca los dos vectores, separándolos con una coma.
8. Pulse (ENTER) para devolver el producto de cruces de los dos vectores, en este caso, $[-2 \ -8 \ 7]$.

Listas

Una lista es una cantidad cualquiera de objetos de cualquier tipo (números, cadenas de caracteres, etcétera) pudiendo aparecer objetos de distintos tipos en la misma lista. En la HP 49G una lista está representada por un par de llaves ({}) que encierran una cantidad de objetos.

Cómo crear una lista

1. Pulse \leftarrow ({})
Con esto se indica que desea crear una lista.
2. Introduzca los elementos que desea incluir en la lista, separándolos con una coma (o sea, (,)).
3. Pulse (ENTER).

Cómo trabajar con listas

Comandos de argumento simple

Los comandos que requieren de un sólo argumento pueden aplicarse a cada elemento de una lista en una sola operación.

Por ejemplo: para encontrar la raíz cuadrada de 5, 6, y 7:

1. Pulse $\sqrt{}$.

1. Pulse $\left[\left[\right] \right]$ 5 $\left[\right]$, 6 $\left[\right]$, 7.

3. Pulse ENTER .

Se devuelve la raíz cuadrada positiva de cada uno de los tres números de la lista, con los tres resultados puestos en una lista.

Comandos de argumento múltiple

Los comandos que requieren más de un argumento, pueden aplicarse a cada elemento de una lista en una sola operación.

Por ejemplo: suponga que desea calcular cuántas muestras de 4 objetos pueden hacerse de poblaciones de 5, 6, y 7 objetos.

1. Pulse $\left[\left[\right] \right]$ MTH para seleccionar la aplicación matemáticas.

2. Utilice las teclas flecha para resaltar **PROB** en la lista de opciones.

3. Pulse F6 para seleccionar **OK**.

4. Resalte **COMB** (el comando de combinaciones) de la lista de comandos.

5. Pulse F6 para seleccionar **OK**.

6. Pulse $\left[\left[\right] \right]$.

7. Pulse $\left[\left[\right] \right]$ 5 $\left[\right]$, 6 $\left[\right]$, 7 para crear una lista de las poblaciones de las cuales desea tomar una muestra.

8. Pulse $\left[\right]$,.

9. Escriba 4 (el tamaño de la muestra).

10. Pulse ENTER .

Las respuestas se devuelven en una lista: {5 15 35}.

Observe que el comando se aplicó a dos parámetros (la lista de las distintas poblaciones y el tamaño de la muestra) cada uno separado por una coma y dentro de un par de paréntesis.

Sistemas y matrices

Un *sistema* es cualquier colección rectangular de objetos. Un sistema de números (reales o complejos) es lo que generalmente se conoce como *matriz*.

Puede usted crear sistemas con muchos tipos de objetos: números reales, complejos, expresiones simbólicas, cadenas de caracteres, programas, etcétera. Puede, por ejemplo, crear una base de datos (tal como una lista de contactos con sus números de teléfono), como un tipo de sistema.

Cómo crear sistemas (*arrays*)

Utilizando *Matrix Writer* (Escritor de Matrices)



Puede crear un sistema con una herramienta especial llamada *Matrix Writer*, que se inicia pulsando \square (MTRW).

Al abrir el *Matrix Writer*, la pantalla se convierte en una tabla, con filas y columnas numeradas como en una hoja de cálculo. El tamaño del sistema está indicado por números en la parte superior izquierda de la tabla. (El tamaño es 0×0 al comienzo, pero aumenta a medida que introduce objetos al sistema). Las coordenadas de filas y columnas de la celda activa en el momento se muestran en la parte inferior izquierda de la pantalla.



Para crear un sistema utilizando *Matrix Writer*:

1. Pulse \square (MTRW) para iniciar *Matrix Writer*.
2. Introduzca el objeto que debe aparecer en la primera celda del sistema.
Este objeto aparece en la línea de comandos a medida que lo escribe.
3. Pulse \square (ENTER) para mover el objeto de la línea de comandos a la primera celda del sistema.
La celda activa es ahora la 1-2 (o sea la celda en fila 1 y columna 2).
4. Ingrese los objetos restantes que deben ir a la fila 1 del sistema, pulsando \square (ENTER) después de cada uno, para moverlo de la línea de comandos a la siguiente celda disponible.

- Una vez escrito el último objeto de la primera fila del sistema, pulse  para pasar a la segunda fila del sistema y luego  hasta llegar a la celda activa 2-1 (o sea la primera celda de la segunda fila).

- Ingrese los objetos que deben aparecer en la segunda fila del sistema, pulsando **ENTER** después de cada objeto.

Observe que el cursor ahora se mueve automáticamente a la primera celda de la fila siguiente después de haber introducido un objeto en la última columna de una fila.








Si necesita agregar más objetos a una fila ya creada, utilice las teclas flecha para posicionar el cursor en la celda en blanco correspondiente e introduzca el nuevo objeto. Para aprender cómo moverse rápido dentro de grandes sistemas, vea “Cómo trasladarse rápidamente a través de un sistema”, más abajo.

- Una vez introducidos todos los objetos que constituyen el sistema, pulse **ENTER**.

Matrix Writer se cierra y el sistema creado aparece en la pantalla inicial.

















Cómo utilizar la línea de comandos

Este método sólo es adecuado para crear sistemas pequeños; para sistemas grandes utilice *Matrix Writer* (como se explicó en la sección anterior).


- Pulse   para introducir los delimitadores del sistema.
- Pulse   para introducir delimitadores de filas.
- Introduzca las filas de elementos, pulsando   para separar cada uno.
- Si desea introducir más filas, continúe desde el paso 5 abajo; de otra forma, pulse **ENTER** para crear el sistema.
- Pulse  para mover el cursor a la derecha del delimitador de filas.
- Pulse **SPC** y repita desde el paso 2.

Cómo trasladarse rápidamente a través de un sistema

Se proveen combinaciones de teclas para que pueda trasladarse rápidamente a través de un sistema que es demasiado grande como para ser visualizado en su totalidad:

-   se traslada a la última columna.
-   se traslada a la primera columna.
-   se traslada a la primera fila.
-   se traslada a la última fila.
-   se traslada al siguiente conjunto de columnas visualizable.
-   se traslada al anterior conjunto de columnas visualizable.
-   se traslada al anterior conjunto de filas visualizable.
-   se traslada al siguiente conjunto de filas visualizable.

Cómo editar un sistema

1. Si el sistema no es el objeto más reciente en la historia, selecciónelo de la misma, ubíquelo en la línea de comandos y pulse **ENTER**.
2. Pulse .

Se inicia *Matrix Writer* mostrando el sistema.
3. Utilice las teclas flecha para hacer resaltar la celda que desee editar.
4. Introduzca el nuevo valor.
5. Pulse **ENTER** para actualizar el sistema.
6. Si desea modificar otros valores, repita desde el paso 3.
7. Pulse **ENTER** para archivar el sistema editado a la historia.

Aritmética matricial

En aritmética matricial necesita introducir una o más matrices. Puede hacerlo escribiéndola en la línea de comandos, seleccionándola de la historia o recuperando el nombre de la variable con la que está asociada.

Las secciones siguientes listan solamente algunas de las funciones matriciales disponibles con la HP 49G. Para mayor información, vea la Guía del Usuario Avanzado (*Advanced User's Guide*) en <http://www.hp.com/calculators/hp49> y también el capítulo 6, “Cómo resolver ecuaciones” por información sobre resolución de sistemas lineales utilizando matrices.

Cómo sumar o restar dos matrices

1. Introduzca la primera matriz.
2. Pulse \oplus o \ominus .
3. Introduzca la segunda matriz.
La segunda matriz debe tener las mismas dimensiones que la primera.
4. Pulse ENTER .
Cada elemento de la segunda matriz se suma o resta del elemento correspondiente de la primera matriz.

Cómo multiplicar o dividir una matriz por un escalar.

1. Introduzca la matriz.
Por información sobre cómo seleccionar una matriz de la historia vea la página 2-4.
2. Pulse \otimes o \oslash .
3. Introduzca el escalar.
4. Pulse ENTER .
Cada elemento de la matriz se multiplica o divide por el escalar.

Cómo multiplicar dos matrices

Debido a que la multiplicación de matrices no es conmutativa, el orden de entrada de las matrices es importante. La cantidad de columnas de la primera matriz debe ser igual a la cantidad de filas de la segunda matriz.

1. Introduzca la primera matriz.
2. Pulse \otimes .
3. Introduzca la segunda matriz.
4. Pulse ENTER .

El resultado es una matriz con la misma cantidad de filas que la primera y la misma cantidad de columnas que la segunda.

Cómo encontrar la determinante de una matriz cuadrada

1. Introduzca DET en la línea de comandos.
2. Pulse \leftarrow O .
3. Introduzca la matriz.
4. Pulse ENTER .

La determinante de una matriz puede utilizarse para resolver un sistema de ecuaciones lineales. Otro método consiste en la utilización de la eliminación Gaussiana para generar una forma de matriz con filas reducidas. Esto se trata en la siguiente sección.

Cómo resolver un sistema de ecuaciones lineales

En el capítulo 6 se explica un método para resolver un sistema de ecuaciones lineales utilizando el solucionador numérico. La HP 49G tiene además un comando matricial para resolver un sistema de ecuaciones lineales, utilizando la eliminación Gaussiana para convertir una matriz aumentada en un formato equivalente de nivel de fila reducida.

Por ejemplo: suponga que debe resolver el siguiente sistema:

$$3x + 4y = 25$$

$$5x - 3y = 3$$

Para resolverlo, usted puede:

1. Introducir RREF en la línea de comando.

“RREF” es el comando ROW-REDUCED ECHELON FORM (FORMATO NIVEL DE FILA REDUCIDA). Y luego:

2. Pulse $\left[\leftarrow \right]$ $\left[\text{O} \right]$.

3. Introduzca o seleccione la matriz aumentada.

La matriz aumentada es una matriz de los coeficientes y constantes del sistema (con las constantes en la columna de extrema derecha de la matriz). En este ejemplo, la matriz aumentada se visualiza así:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 25 \\ 5 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

4. Pulse $\left[\text{ENTER} \right]$.

Se devuelve el formato nivel de fila reducido de la matriz aumentada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

La respuesta al sistema de ecuaciones lineales se encuentra en la columna de extrema derecha en la matriz de nivel de fila reducida: en nuestro ejemplo, $x = 3$ e $y = 4$.



Usted puede acelerar el procesamiento de matrices grandes utilizando el indicador de sistema LARGE MATRICES (MATRICES GRANDES).