SFOURIER

Software para HP49/50

mantenido por

Gustavo Portales

www.gaak.org - hp@gaak.org

EJEMPLOS DE APLICACIÓN.

Elaborado por:

Román Barrios - ReMat

romanbarrioss@hotmail.com

La serie de Fourier de una función f(x) defina en el intervalo (-p,p) es:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right)+b_n sen\left(\frac{n\pi x}{p}\right)\right)$$

Donde:

$$a_0=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)dx \qquad a_n=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right)dx \qquad b_n=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)sen\left(\frac{n\pi x}{p}\right)dx$$

Son los *coeficientes de Fourier* de f(x) en (-p,p) .

Ejemplo 1.

Determine el desarrollo de serie de Fourier para la función, en el intervalo dado.

$$f(x)=x^2 \qquad 0<x<2\pi$$

Hallamos los coeficientes:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2dx=\left[\frac{1}{\pi}\frac{x^3}{3}\right]_0^{2\pi}=\frac{8}{3}\pi^2$$

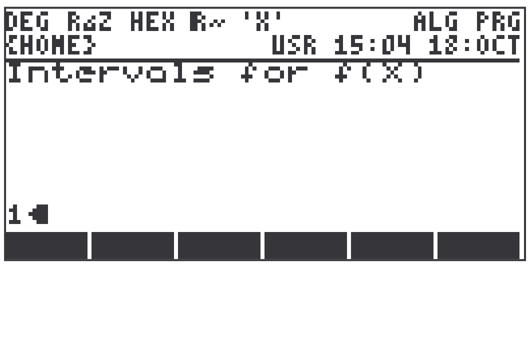
$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\cos(nx)dx=\frac{1}{\pi}\left[x^2\left(\frac{sen(nx)}{x}\right)-2x\left(\frac{-\cos(nx)}{n^2}\right)+2\left(\frac{-sen(nx)}{n^3}\right)\right]_0^{2\pi}=\frac{4}{n^2}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2sen(nx)dx=\frac{1}{\pi}\left[x^2\left(\frac{-\cos(nx)}{n}\right)+2x\left(\frac{sen(nx)}{n^2}\right)+2\left(\frac{\cos(nx)}{n^3}\right)\right]_0^{2\pi}=\frac{-4\pi}{n}$$

Finalmente: $f(x)=\frac{4\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cos(nx)-\frac{4\pi}{n}sen(nx)\right)$

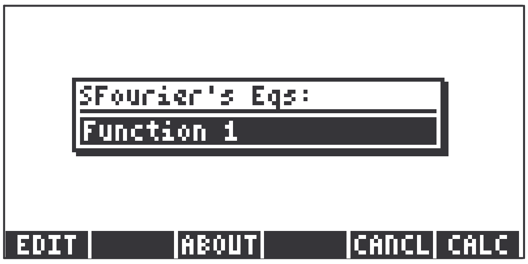
Para poder realizar este trabajo tan laborioso utilizando el SFourier, procedemos de la siguiente manera.

Al correr el programa nos pedirá introducir el número de intervalos, para este caso será 1, debido a que la función está definida para el intervalo 0<x<2Π.



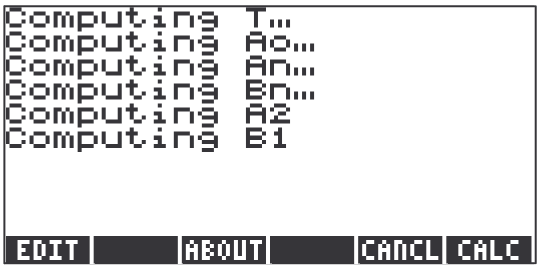
Posteriormente el número de armónicos, suponiendo 3.

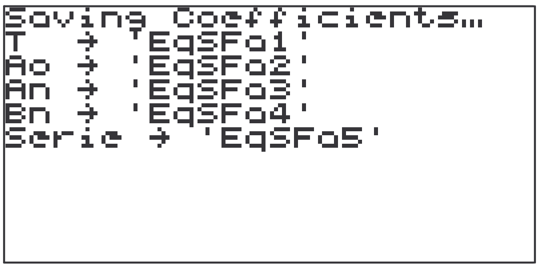
Posteriormente habrá que editar la ecuación, ya que la existente hasta este punto es una creada por defecto, pera ello presione edit y este abrirá el editor de ecuaciones.



Escribimos la función deseada y presionando enter volvemos el menú anterior, donde después de presionar calc o enter empezará el proceso de determinación de los coeficientes y el respectivo desarrollo de Fourier.

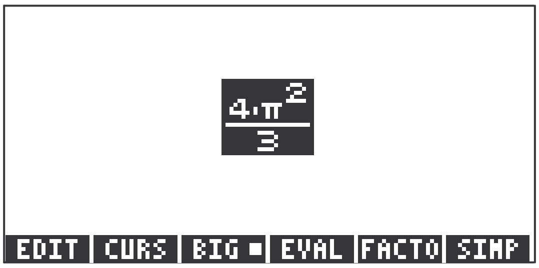
Comenzará el proceso el cual tardará dependiendo de su procesador (hp49, hp48gii, hp49g+, hp50) y que tan compleja sea la función introducida por usted.



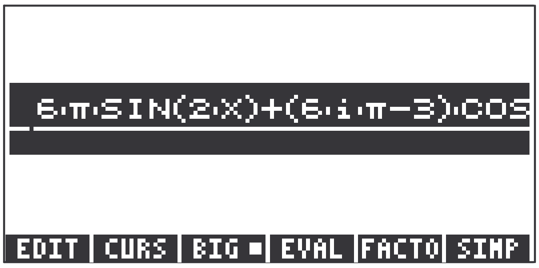


Finalmente aparecerá un menú que permitirá presionando EQW simplificar y VIEW mostrar los diferentes coeficientes y la serie respectiva.

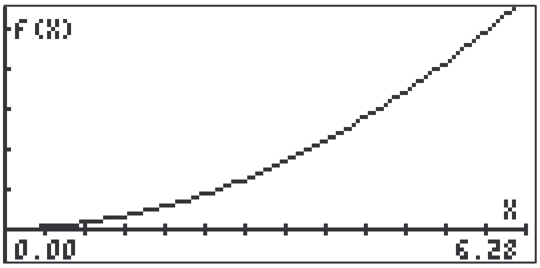
En T veremos el periodo que como fue determinado corresponde a 2*Π, en a_0 obtenemos luego de simplificar usando EQW, el valor mostrado en la gráfica.



Asi como también se puede ver el valor de a_n, b_n, y la serie completa para el tercer armónico.



Adicionalmente es posible graficar la función con la opción GRAPH.

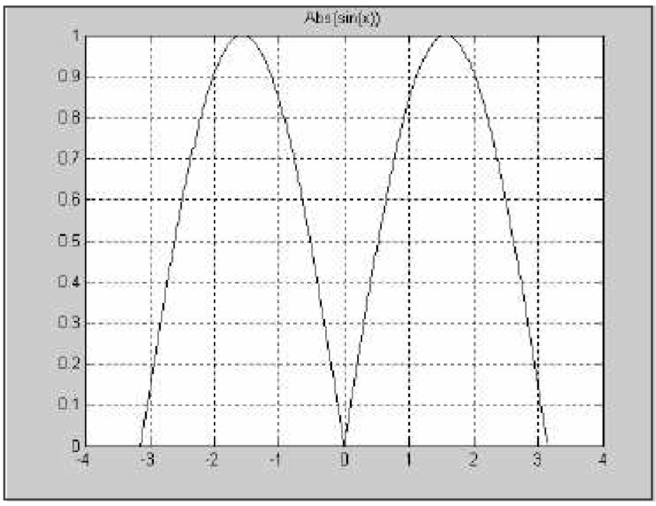


Ejemplo 2.

Determine el desarrollo de serie de Fourier para la función, en el intervalo dado.

$$f(x) = |sen(x)| \qquad -\pi < x < \pi$$

Grafica de la función:



Por ser una función par, es posible minimizar los cálculos usando las siguientes formulas:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) \qquad a_0 = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)dx \qquad a_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right)dx$$

Entonces, se tiene:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} senxdx = \frac{4}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} senx\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\big(sen(x-nx) + sen(x+nx)\big)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{-1}{1-n}\cos(x-nx) - \frac{1}{1+n}\cos(x+nx)\right]_0^{\pi}$$

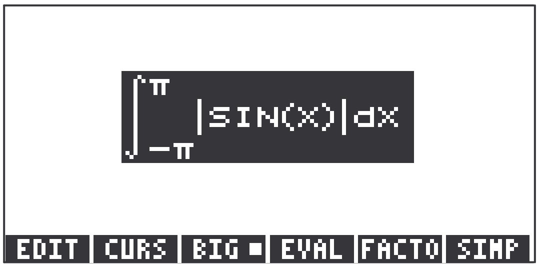
$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos(\pi x - n\pi)}{1-n} - \frac{\cos(\pi x + n\pi)}{1+n} - \frac{1}{1-n} - \frac{1}{1+n}\right]$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos\pi\cos n\pi}{1-n} - \frac{sen\pi sen(n\pi)}{1-n} - \frac{\cos\pi\cos n\pi}{1+n} - \frac{sen\pi sen(n\pi)}{1+n} - \frac{1}{1-n} - \frac{1}{1+n}\right]$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{(-1)^n}{1-n} + \frac{(-1)^n}{1+n} - \frac{1}{1-n} - \frac{1}{1+n}\right] = \frac{2}{\pi}\left[\frac{(-1)^n}{1-n^2}\right]$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{1-n^2}\cos nx \qquad n \neq 1$$

Usando el SFourier, indicamos 1 intervalo, 2 armónicos, e introducimos la nueva función. Tambien pudo ser escrita con dos ecuaciones para menor que 0 –senx y mayor que cero senx.



Calculamos y obtenemos, los valores. Apreciando que la serie evaluada para dos armónicos da infinito, resultado lógico debido a que para el primer armónico da infinito por lo que se debe hacer la salvedad, por que programa no lo indica. Sin embargo es posible ver T, a_0, a_n, y b_n el cual da cero como era de esperarse ya que se trato una función par.