

CENTROIDE

Introducción

El peso de un objeto por ejemplo, generalmente es representada por el peso total del objeto, aunque la realidad es que debería ser representada como la acción de un gran número de pequeños pesos distribuidos en todo el objeto y actuando en cada pequeña parte del objeto. Un sistema equivalente a este planteado es ubicar el peso total o resultante en un único punto denominado *centro de gravedad*.

Definición

El centro de gravedad es el punto de aplicación de un cuerpo rígido donde al ubicar la resultante de las fuerzas los efectos sobre el cuerpo no varían. En el caso de superficies homogéneas, el centro de gravedad se sustituye por el *centroide* del área, el cual considera las áreas de los elementos en vez de los pesos y las expresiones para determinar las coordenadas centroidales son:

$$A = \int dA \quad ; \quad \bar{x}A = \int x dA \quad ; \quad \bar{y}A = \int y dA$$

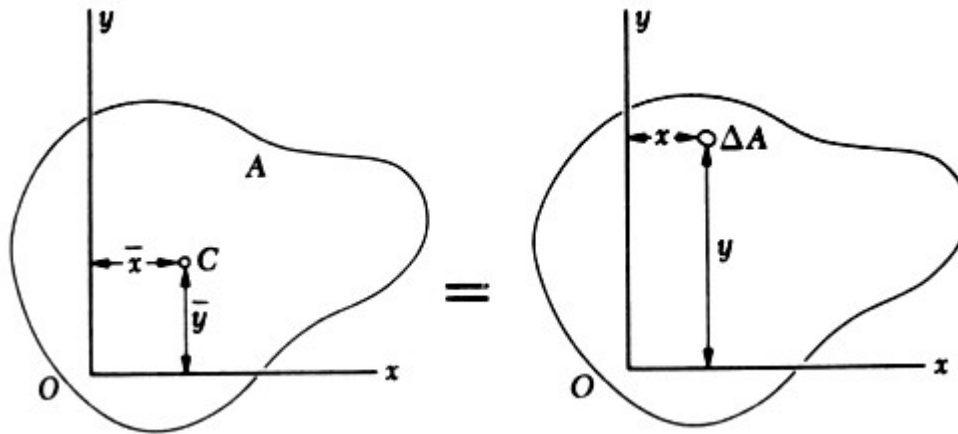


Figura 1. Centroide del área A y coordenadas de una parte del área dA

Centroide de áreas compuestas

En gran cantidad de casos una superficie cualquiera puede ser subdividida en una serie de figuras comunes (rectángulo, triángulo, circunferencia etc..). Esta forma de análisis es útil y permite determinar el centroide de cualquier superficie según:

$$A = \sum A_i \quad ; \quad \bar{x} = \frac{\sum \bar{x}_i A_i}{\sum A_i} \quad ; \quad \bar{y} = \frac{\sum \bar{y}_i A_i}{\sum A_i}$$

Los centroides y el área común se obtiene de la aplicación de fórmulas para áreas comunes como los indicados en la tabla.

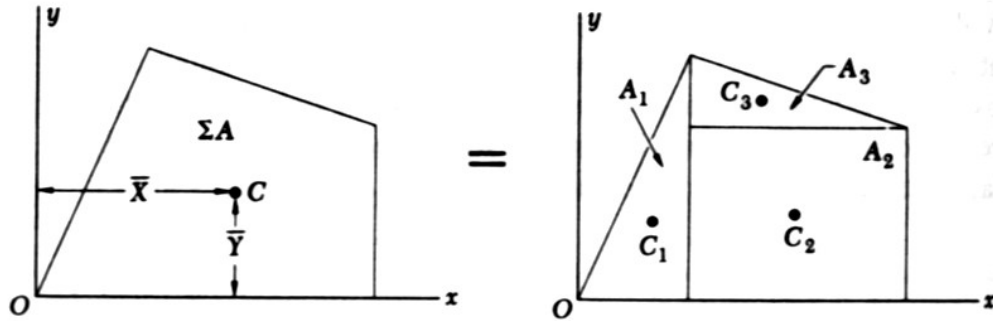


Figura 2. Subdivisión de un área

Teorema de Pappus-Guldin

Una *superficie de revolución* es aquella que se genera al girar una curva con respecto de un eje, por ejemplo una esfera se puede generar al girar un arco semicircular. De manera similar tenemos los *cuerpos de revolución* que son obtenidos al girar un área con respecto de un eje fijo.

Teorema I

El área de una superficie de revolución es igual a la longitud de la curva generadora por la distancia recorrida por el centroide de la curva, al generar la superficie.

Teorema II

El volumen de un cuerpo de revolución es igual al área generadora por la distancia recorrida por el centroide del área al generar el cuerpo.

Bibliografía

Beer, F. y Johnston, E. R. (1977). Mecánica Vectorial para Ingenieros (Estática Tomo I). Bogotá, Colombia: McGraw-Hill Latinoamericana S.A.

MOMENTOS DE INERCIA

Introducción

El centroide representa el punto donde se ubica la resultante del peso de un objeto, además esta posición representa un movimiento simple de un objeto al contrario si se analiza el objeto completo donde cada punto presenta un movimiento más complejo. El centroide es proporcional a la ubicación del área asociada. Por otra parte, tenemos una medida denominada *momento de inercia* que no depende solamente de la ubicación del área sino de la distancia hasta un eje dado.

Definición

El momento de inercia es una propiedad geométrica de una superficie o área que representa la distancia de un área con respecto a un eje dado. Se define como la suma de los productos de todas las áreas elementales multiplicadas por el cuadrado de las distancias a un eje. Tiene unidades de longitud elevada a la cuatro (*longitud⁴*). Es importante para el análisis de vigas y columnas, porque el diseño del tamaño de estos elementos está relacionado con el momento de inercia, ya que el momento de inercia I define la forma apropiada que debe la sección del elemento estructural. (Beer y Johnston, 1977; Parker y Ambrose, 1995)

Dada la definición de momento de inercia, esta se expresa según lo siguiente:

$$I_x = \int y^2 dA \quad ; \quad I_y = \int x^2 dA$$

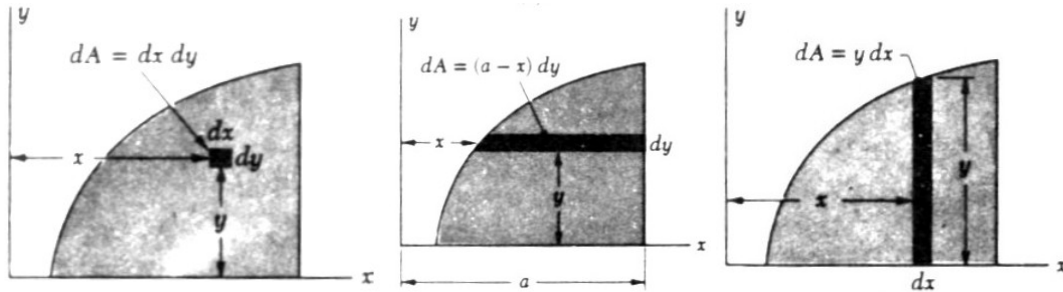


Figura 1. Esquema de Momento de Inercia

Momento de Inercia de franjas diferenciales

Al desarrollar la ecuación $I_x = \int y^2 dA$ para una figura rectangular es según la Figura 2 y respecto a la base del rectángulo es la siguiente:

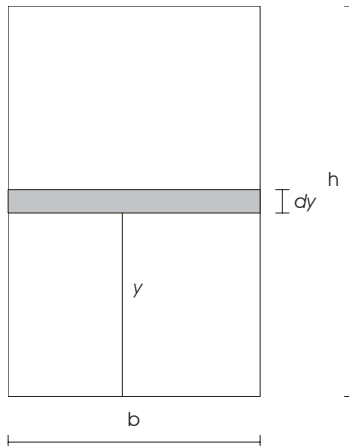


Figura 2. Momento de Inercia de un área rectangular

$$dA = bdy ; dI_x = y^2 bdy \Rightarrow I_x = \int_0^h by^2 dy \Rightarrow I_x = b \frac{y^3}{3} \Big|_0^h \Rightarrow I_x = \frac{bh^3}{3}$$

La anterior ecuación se desarrolla para un elemento diferencial según la Figura 3 y permite obtener el momento de inercia de un área cualquiera al ser integrada.

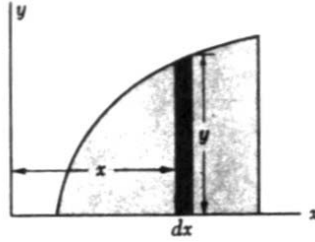


Figura 3. Esquema de elemento diferencial de inercia

$$dI_x = \frac{1}{3} y^3 dx \Rightarrow I_x = \int \frac{1}{3} y^3 dx$$

$$dI_y = x^2 y dx \Rightarrow I_y = \int x^2 y dx$$

Otras propiedades geométricas relacionadas con el Momento de Inercia

Momento polar de inercia

Esta es una medida importante para los problemas relacionados con ejes cilíndricos, polares y problemas de torsión de una sección. Está definido como:

$$J_o = \int r^2 dA \Rightarrow J_o = I_x + I_y$$

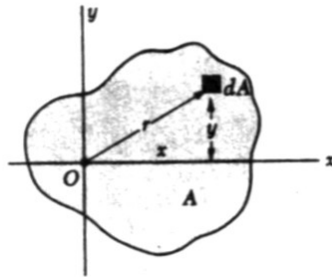


Figura 4. Momento Polar de Inercia

Radio de giro

Si el área se concentra en una franja paralela a un eje con un espesor diferencial, el radio de giro representa la distancia del área transformada para que tenga el mismo momento de inercia respecto a eje dado. Se define como (Beer y Johnston, 1977):

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} ; r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} ; r_o = \sqrt{\frac{J_o}{A}}$$

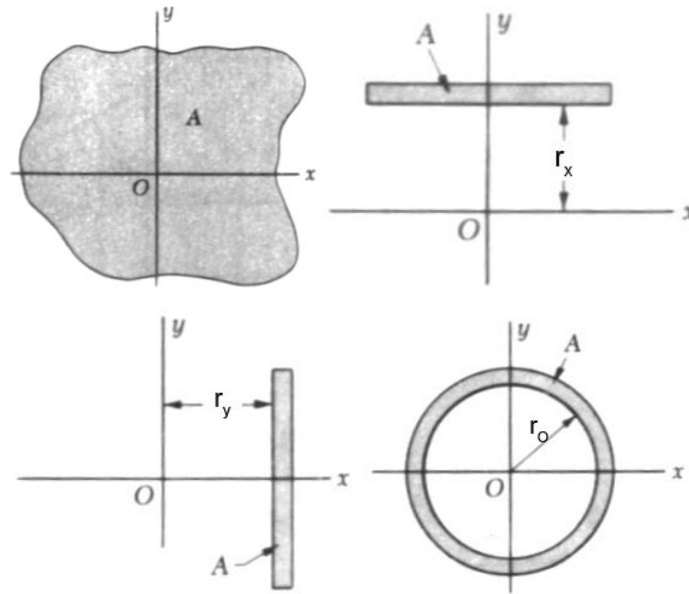


Figura 5. Radio de giro

Módulo de sección

Representa la relación del momento de inercia respecto a la distancia de la fibra más alejada al eje neutro¹, esta medida es útil en el diseño de vigas y se define como (Parker y Ambrose, 1995):

$$S_x = \frac{I_x}{y} ; S_y = \frac{I_y}{x}$$

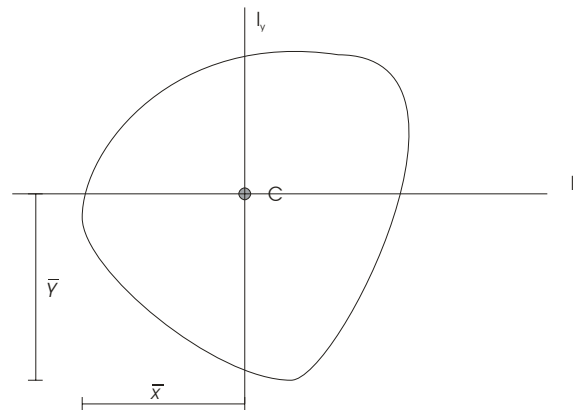


Figura 6. Modulo de Sección

Momento de inercia de áreas compuestas

Teorema de los ejes paralelos

Cuando se combinan superficies, los momentos de inercia de cada área requieren de la transmisión del momento de inercia al nuevo eje centroidal del área compuesta, esta se logra mediante el *Teorema de los ejes paralelos* o *Teorema de Steiner*, donde el momento de inercia con respecto a una eje dado es igual al

¹ Distancia que es igual a la distancia que esta la fibra al centroide, por lo que dicha distancia es la centroidal.

momento de inercia con respecto al eje centroidal paralelo al eje dado más el producto del área multiplicado por el cuadrado de la distancia entre los dos ejes.

$$I = \bar{I} + Ad^2 ; r = \bar{r} + d^2 ; J_o = \bar{J}_c + Ad^2$$

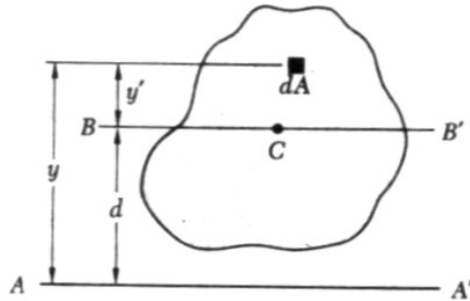


Figura 7. Esquema del Teorema de los Ejes Paralelos

Áreas compuestas

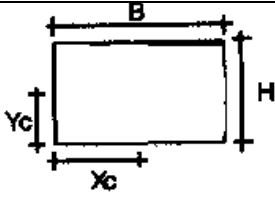
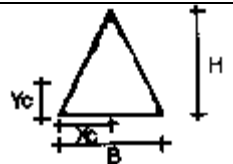
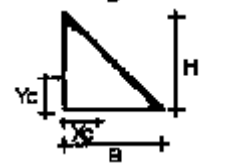
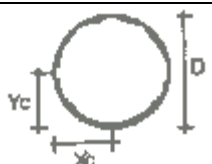
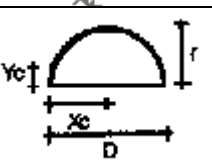
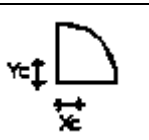
Un área compuesta se puede subdividir en varias áreas comunes cuyas expresiones de momento de inercia sean conocidas, de manera que el momento de inercia del área compuesta es igual a la suma de los momentos de inercia de cada área común, siempre y cuando cada momento de inercia este referido al mismo eje; Para ello se emplea el teorema de los ejes paralelos.

Bibliografía

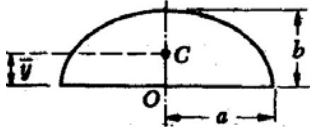
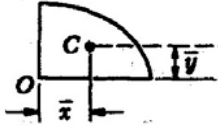
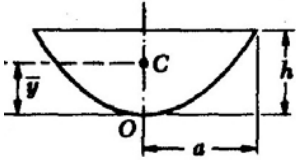
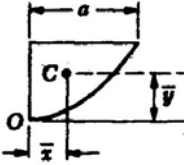
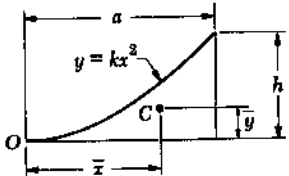
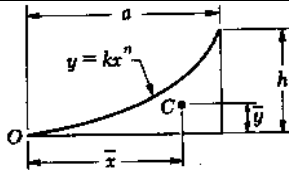
Beer, F. y Johnston, E. R. (1977). Mecánica Vectorial para Ingenieros (Estática Tomo I). Bogotá, Colombia: McGraw-Hill Latinoamericana S.A.

Parker, H. y Ambrose, J. (1995). Ingeniería simplificada para Arquitectos y Constructores. México D.F, México: Editorial LIMUSA, S.A. de C.V.

Centroides y Momentos de Inercia de Figuras comunes

Forma		\bar{x}	\bar{y}	Area	$I_{\bar{x}}$	$I_{\bar{y}}$
Rectángulo		$\frac{B}{2}$	$\frac{H}{2}$	BH	$\frac{BH^3}{12}$	$\frac{B^3H}{12}$
Triángulo			$\frac{H}{3}$	$\frac{BH}{2}$	$\frac{BH^3}{36}$	
		$\frac{B}{3}$	$\frac{H}{3}$	$\frac{BH}{2}$	$\frac{BH^3}{36}$	$\frac{B^3H}{36}$
Círculo		$\frac{D}{2}$	$\frac{D}{2}$	$\pi r^2 = \frac{\pi D^2}{4}$	$\frac{\pi r^4}{4}$	$\frac{\pi r^4}{4}$
Medio Círculo		$\frac{D}{2}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$	$\frac{9\pi^2 - 64}{72\pi} r^4$	$\frac{\pi r^4}{8}$
Cuarto Círculo		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$	$\frac{9\pi^2 - 64}{144\pi} r^4$	$\frac{9\pi^2 - 64}{144\pi} r^4$

Centroides y Momentos de Inercia de Figuras comunes

Forma		\bar{x}	\bar{y}	Area	$I_{\bar{x}}$	$I_{\bar{y}}$
Media elipse		0	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{2}$	$\frac{9\pi^2 - 64}{72\pi} ab^3$	$\frac{\pi a^3 b}{8}$
Cuarto de elipse		$\frac{4a}{3\pi}$	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{4}$	$\frac{9\pi^2 - 64}{144\pi} ab^3$	$\frac{9\pi^2 - 64}{144\pi} a^3 b$
Parábola		0	$\frac{3h}{5}$	$\frac{4ah}{3}$	$\frac{16ah^3}{175}$	$\frac{4a^3 h}{15}$
Media parábola		$\frac{3a}{8}$	$\frac{3h}{5}$	$\frac{2ah}{3}$	$\frac{8ah^3}{175}$	$\frac{19a^3 h}{480}$
Extracto parabólico		$\frac{3a}{4}$	$\frac{3h}{10}$	$\frac{ah}{3}$	$\frac{37ah^3}{2100}$	$\frac{a^3 h}{80}$
Extractos de forma general		$\frac{n+1}{n+2} a$	$\frac{n+1}{4n+2} h$	$\frac{ah}{n+1}$	$\frac{(7n^2 + 4n + 1)ah^3}{12(3n+1)(2n+1)^2}$	$\frac{ha^3}{(n+3)(n+2)^2}$