



CINÉTICA DEL CUERPO RÍGIDO EN 3D

Programa HP 50G
Written in User-RPL
by RubensaiD



¿Para qué sirve este programa?

Uno de los últimos temas tocados en el curso de Dinámica en la Universidad Nacional de Ingeniería (Perú) es la cinética del cuerpo rígido en 3D, que comparte las mismas leyes que en el caso del 2D, sin embargo, sus ecuaciones varían un poco.

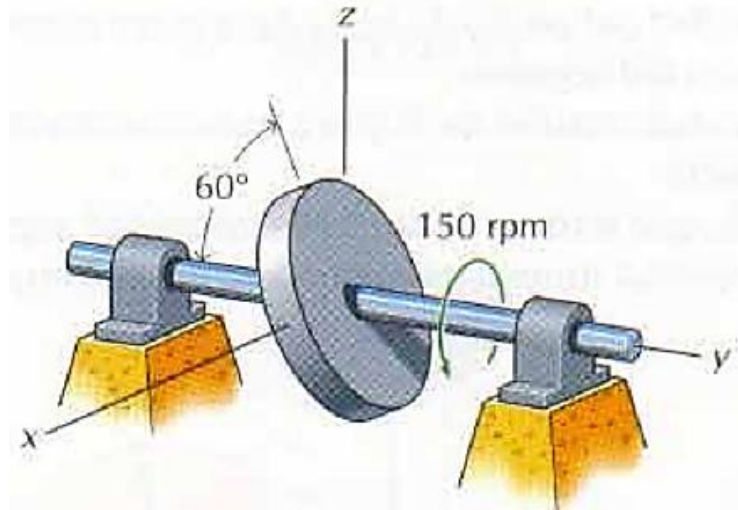


Figura P20-57. Ingeniería Mecánica - Dinámica. William F. Riley. Pág. 437.

Supongamos que queremos hallar las fuerzas en los apoyos, para lograrlo debemos aplicar las ecuaciones de Euler que están basadas en la segunda ley de Newton y las ecuaciones del movimiento angular. Entonces, tenemos:

Ecuaciones de Euler

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\sum \vec{M} = \dot{\vec{H}}_O + \vec{\Omega} \times \vec{H}_O$$

Esta última ecuación es más sencilla de recordar y operar si la expresamos en forma matricial.

$$\begin{bmatrix} \sum M_{Ox} \\ \sum M_{Oy} \\ \sum M_{Oz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

El vector $\vec{\omega}$ es la velocidad angular del cuerpo rígido, el vector $\vec{\alpha}$ es la aceleración angular del cuerpo rígido y el vector $\vec{\Omega}$ es la velocidad angular del sistema coordenado móvil. Generalmente en los problemas $\vec{\Omega} = \vec{\omega}$.

Este programa además también da los valores del momento de inercia máximo, mínimo y medio. Estos valores se obtienen al resolver la ecuación:



$$I^3 - aI^2 + bI - c = 0$$

Donde:

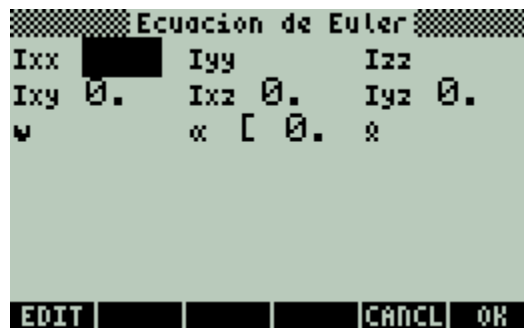
$$a = I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}$$



$$b = I_{xx}I_{yy} + I_{xx}I_{zz} + I_{yy}I_{zz} - I_{xy}^2 - I_{xz}^2 - I_{yz}^2$$

$$c = \begin{vmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{vmatrix}$$

¿Cómo uso el programa?

Al ejecutar el programa nos damos cuenta que ya tiene algunos valores por defecto. Es común encontrar problemas donde $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$, es decir, donde sus ejes sean los principales. Además, también es usual que el sistema no presente aceleración, por tanto el campo del vector $\vec{\alpha}$ también es nulo.



Si es que el problema no coincide con estos valores por defecto, pues simplemente los reemplazamos. Rellenar estas dos primeras filas es sencillo pues se tratan de números comunes y corrientes. La siguiente y última fila puede ser que demore un poco más si es que no hemos trabajado con vectores antes en la calculadora. Escribir un vector es sencillo, solo debemos poner los corchetes (cambio izquierdo  + símbolo de multiplicación ) y luego escribir los tres componentes del vector separados por espacios. Vea la imagen.

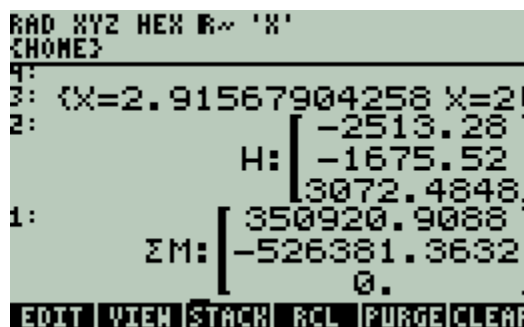




El último campo a rellenar muestra un mensaje que nos dice que este tomará el valor de $\vec{\omega}$, es decir, $\vec{\Omega} = \vec{\omega}$. Si nuestro sistema coordenado móvil va a tener una velocidad angular distinta pues debemos escribir ese vector en este campo.



Presionamos OK y obtenemos los momentos de inercia máximo, mínimo y medio, el momento angular respecto al punto que hemos elegido y la sumatoria de momentos respecto al mismo punto de trabajo.





Ejemplo de Aplicación

El disco delgado de la figura tiene un radio de 250 mm, pesa 10 N y está montado sobre un eje situado a 175 mm del centro.

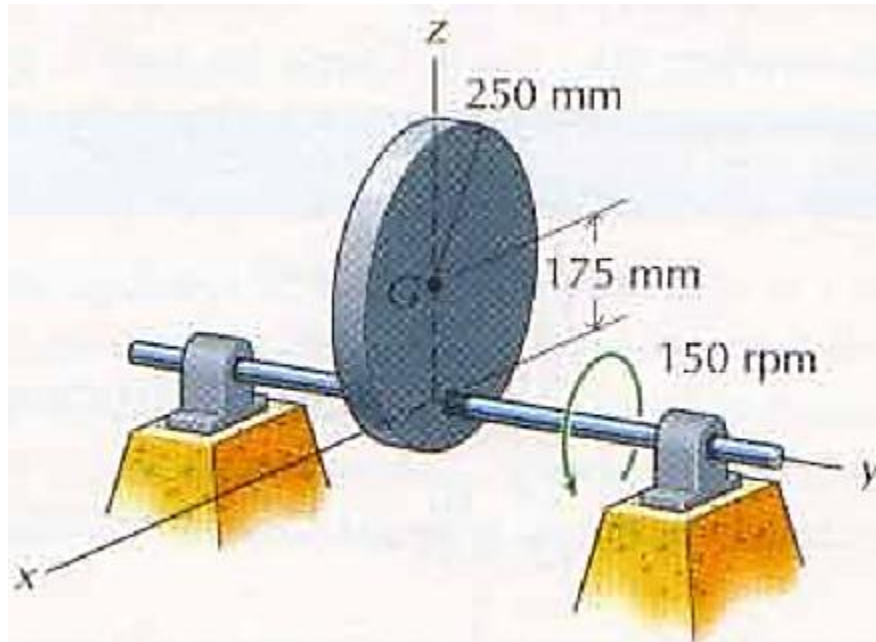


Figura P20-51. Ingeniería Mecánica - Dinámica. William F. Riley. Pág. 436.

Solución

Lo primero es calcular todos los momentos de inercia del sistema mostrado. El eje no presenta masa así que solo nos interesa el disco delgado.

$$mg = 10 \Rightarrow m = 1.019 \text{ Kg}$$

$$r_G = (0, 0, 0.175) \text{ m}$$

$$I_{xx} = \frac{1}{4}(1.019)(0.250^2) + (1.019)(0^2 + 0.175^2) = 0.04713 \text{ kg.m}^2$$

$$I_{yy} = \frac{1}{2}(1.019)(0.250^2) + (1.019)(0^2 + 0.175^2) = 0.06305 \text{ kg.m}^2$$

$$I_{zz} = \frac{1}{4}(1.019)(0.250^2) + (1.019)(0^2 + 0^2) = 0.01592 \text{ kg.m}^2$$

$$I_{xy} = 0 + (1.019)(0)(0) = 0$$

$$I_{xz} = 0 + (1.019)(0)(0.175) = 0$$

$$I_{yz} = 0 + (1.019)(0)(0.175) = 0$$



En el gráfico tenemos como dato la velocidad angular del cuerpo rígido, al que soldaremos el sistema coordenado móvil de tal manera que tengan la misma velocidad angular.

$$\vec{\Omega} = \vec{\omega} = 150 * \frac{2\pi}{60} = 15.7079 \frac{rad}{s} \vec{j}$$

No presenta aceleración angular así que $\vec{\alpha} = \vec{0}$.

Ahora solo metemos todos estos datos a la HP.

```

Ecuacion de Euler
Ixx .04' Iyy .06: Izz .01!
Ixy 0. Ixz 0. Iyz 0.
w [ 0. a [ 0. z [
Igual a w (Sino + Edit)
EDIT  CANCEL OK

```



```

RAD XYZ HEX R= 'X'
[HOME]
3: {X=.01592 X=.04713 X=
2: H: [.990383095
1: ΣM: [0.
EDIT VIEW STACK RCL PURGE/CLEAR

```

Para terminar de resolver el problema debemos aplicar las ecuaciones de traslación luego de realizar el diagrama de cuerpo libre del sistema.



Contacto

Para cualquier duda, sugerencia o pedido contáctese con el autor (*RubensaiD*)

Mail: rubensaid12@gmail.com

Twitter: [@Code09FIM](https://twitter.com/Code09FIM)

Página Web: <http://www.code09fim.uni.cc>



FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA
UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
ENERO 2011
LIMA - PERÚ