RUNGE-KUTTA v1. 1

El archivo rungekutta.hpprgm contiene cuatro funciones CAS para la calculadora graficadora HP Prime: RK1(), RK2(), RK3() y RK4(). Estas cuatro funciones resuelven ecuaciones diferenciales ordinarias; RK1 utiliza el método de Euler, RK2 utiliza el método de Heun (o método Euler modificado), RK3 y RK4 utilizan los métodos de Runge-Kutta Método de tercer y cuarto orden, respectivamente. Estas funciones CAS también se pueden utilizar para aproximar las soluciones de ecuaciones diferenciales de orden superior o sistemas de ecuaciones diferenciales.

El método numérico para resolver una ecuación diferencial ordinaria es:

$$y_{i+1} = y_i + \phi \times h$$

Dónde:

$$\phi = \begin{cases} \dfrac{dy}{dx}(x_i, y_i) & ;for\ Euler's\ Method \\ \dfrac{\dfrac{dy}{dx}(x_i, y_i) + \dfrac{dy}{dx}(x_{i+1}, {y_{i+1}}^0)}{2} & ;for\ Heun's\ Method \\ \dfrac{1}{6} * (k_1 + 2 \times k_2 + 2 \times k_3 + k_4) & ;for\ RK3\ Method \\ \dfrac{1}{6} * (k_1 + 2 \times k_2 + 2 \times k_3 + k_4) & ;for\ RK4\ Method \end{cases}$$

Para obtener más información acerca de los métodos Ruge-Kutta, consulte *Numerical methods for engineers* (Chapra & Canale,2015).

<u>Argumentos de las funciones:</u>

Estas funciones requieren tres argumentos:

1. Matriz de tres filas:
   - Primera fila: debe contener todas las variables, incluida la variable independiente como primer elemento de esta fila.
   - Segunda fila: debe contener las derivadas de todas las variables de la primera fila.
   - Tercera fila: debe contener las condiciones iniciales de las variables de la primera fila.
2. Punto final para la variable independiente
3. Número de iteraciones

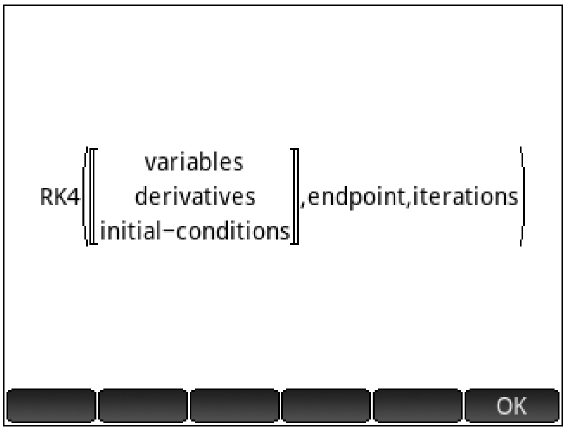


Figura 1. Argumentos para las funciones Rk

Estas funciones solo se pueden ejecutar en la vista CAS. Pulse 

para acceder a la vista CAS.

Las funciones RK fueron probadas y funcionan bien utilizando una calculadora graficadora HP Prime con las siguientes características:

Versión de software: 2.1.14425 (2020 01 16)

Versión CAS: 1.5.0

Si la versión de software y la versión CAS de su calculadora son diferentes, le recomiendo que actualice su calculadora. No garantizo el correcto funcionamiento de las funciones RK en una calculadora con diferentes versiones de software o versiones CAS.

Además, le recomiendo que compruebe la configuración CAS de su calculadora. La configuración CAS de mi calculadora son los que se muestran en la figura 2 y la figura 3.

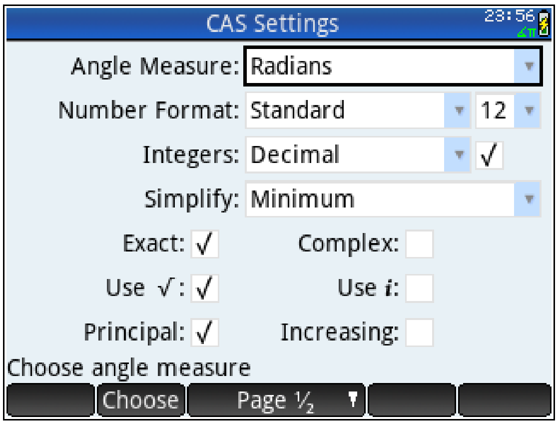


Figura 2. Configuración de CAS (Página 1)

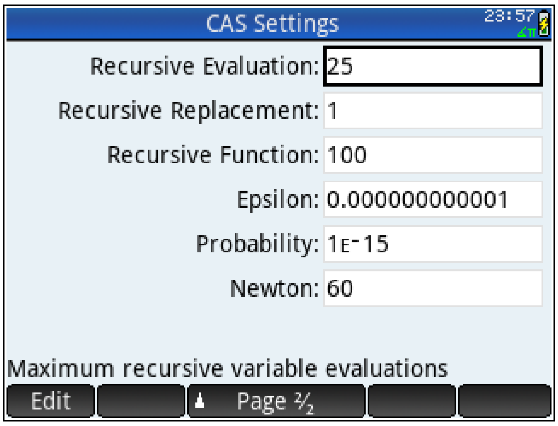


Figura 3. Configuración de CAS (Página 2)

<u>Ejemplo 1:</u>

Utilice **el método de Euler** para aproximar la solución para el siguiente problema de valor inicial:

$$y' = 1 + \frac{y}{t} + \left(\frac{y}{t}\right)^2$$

Para $1 \leq t \leq 3$, con $y(1) = 0$. Usar h = 0.2.

Solución con la HP Prime:

Identifique los parámetros necesarios para ejecutar el programa:

- Variables: $\begin{cases} t \\ y \end{cases}$
- Derivadas: $\begin{cases} t' = 1 \\ y' = 1 + \frac{y}{t} + \left(\frac{y}{t}\right)^2 \end{cases}$
- Condición inicial: $\begin{cases} t_0 = 1 \\ y_0 = 0 \end{cases}$
- Punto final: $t_{punto\ final} = 3$
- Iteraciones: $\frac{t_{punto\ final} - t_0}{h} = \frac{3-1}{0.2} = 10$

Ya que tenemos que usar el método de Euler, ejecutaremos RK1:

$$\mathrm{RK1}\left(\begin{bmatrix} t & y \\ 1 & 1+\frac{y}{t}+\left(\frac{y}{t}\right)^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},3,10\right)$$

OK

Figura 4. Argumentos para RK1 (ejemplo 1)

CAS ITERATIONS 00:35

	t	y	Φ_y
i:0	1	0	1
i:1	1.2	0.2	1.1944444
i:2	1.4	0.4388889	1.4117693
i:3	1.6	0.7212428	1.6539764
i:4	1.8	1.0520380	1.9260656
i:5	2	1.4372511	2.2350483
i:6	2.2	1.8842608	2.5900439
i:7	2.4	2.4022696	3.0028379
i:8	2.6	3.0028372	3.4888177
i:9	2.8	3.7006007	4.0683836
i:10	3	4.5142774	0

Edit | More | Go To | Go → | Cancel | OK

Figura 5. Iteraciones usando RK1, ejemplo 1

Ejemplo 2 (Sistemas de Ecuaciones Diferenciales):

Utilice **el método Euler modificado** para aproximar la solución del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

$$u_1' = u_1 - u_2 + 2$$

$$u_2' = -u_1 + u_2 + 4 \times t$$

Para $0 \le t \le 1$, con $u_1(0) = -1$ y $u_2(0) = 0$. Usar h = 0.1

Solución:

Identifique los parámetros necesarios para ejecutar el programa:

- Variables: $\begin{cases} t \\ u_1 \\ u_2 \end{cases}$
- Derivadas: $\begin{cases} t' = 1 \\ u_1' = u_1 - u_2 + 2 \\ u_2' = -u_1 + u_2 + 4 \times t \end{cases}$
- Condición inicial: $\begin{cases} t_0 = 0 \\ (u_1)_0 = -1 \\ (u_2)_0 = 0 \end{cases}$
- Punto final: $t_{punto\ final} = 1$
- Iteraciones: $\frac{t_{punto\ final} - t_0}{h} = \frac{1-0}{0.1} = 10$

Puesto que tenemos que usar el método modificado de Euler (método de Heun), ejecutaremos RK2:

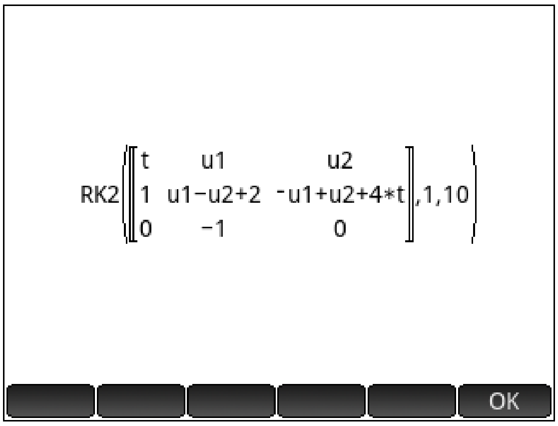
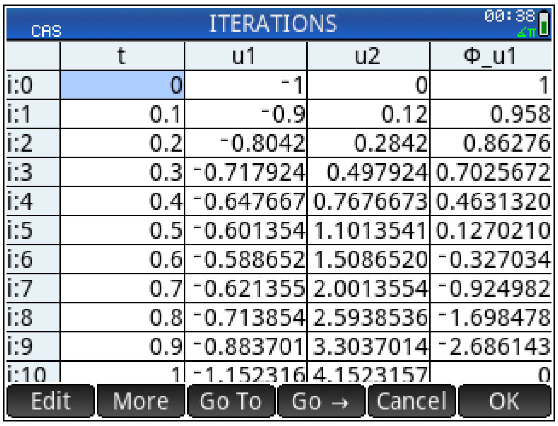


Figura 6. Argumentos para RK2 (ejemplo 2)



CAS ITERATIONS 00:38

	t	u1	u2	Φ_u1
i:0	0	-1	0	1
i:1	0.1	-0.9	0.12	0.958
i:2	0.2	-0.8042	0.2842	0.86276
i:3	0.3	-0.717924	0.497924	0.7025672
i:4	0.4	-0.647667	0.7676673	0.4631320
i:5	0.5	-0.601354	1.1013541	0.1270210
i:6	0.6	-0.588652	1.5086520	-0.327034
i:7	0.7	-0.621355	2.0013554	-0.924982
i:8	0.8	-0.713854	2.5938536	-1.698478
i:9	0.9	-0.883701	3.3037014	-2.686143
i:10	1	-1.152316	4.1523157	0

Edit | More | Go To | Go → | Cancel | OK

Figura 7. Iteraciones usando RK2, ejemplo 2

Ejemplo 3 (Ecuaciones de orden superior):

Transforme el problema de valor inicial de segundo orden

$$y'' - 2 \times y' + 2 \times y = e^{2\times t} \times \sin t$$

Para $0 \leq t \leq 1$, con $y(0) = -0.4,$ $y'(0) = -0.6$

En un sistema de problemas de valor inicial de primer orden y utilice el método **Runge-Kutta de cuarto orden** con h=0.1 para aproximar la solución.

Solución:

Hacer $z = y'(t)$. Esto transforma la ecuación de segundo orden en el sistema:

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = e^{2\times t} \times \sin t - 2 \times y + 2 \times z \end{cases}$$

Con las condiciones iniciales: $\begin{cases} y(0) = -0.4 \\ z(0) = -0.6 \end{cases}$

Ahora, identificamos los parámetros necesarios para ejecutar el programa:

- Variables: $\begin{cases} t \\ y \\ z \end{cases}$
- Derivadas: $\begin{cases} t' = 1 \\ y' = z \\ z' = e^{2\times t} \times \sin t - 2 \times y + 2 \times z \end{cases}$
- Condición inicial: $\begin{cases} t_0 = 0 \\ y_0 = -0.4 \\ z_0 = -0.6 \end{cases}$
- Punto final: $t_{punto\ final} = 1$
- Iteraciones: $\frac{t_{punto\ final} - t_0}{h} = \frac{1-0}{0.1} = 10$

Puesto que tenemos que usar el método Runge-Kutta de cuarto orden, ejecutaremos RK4:

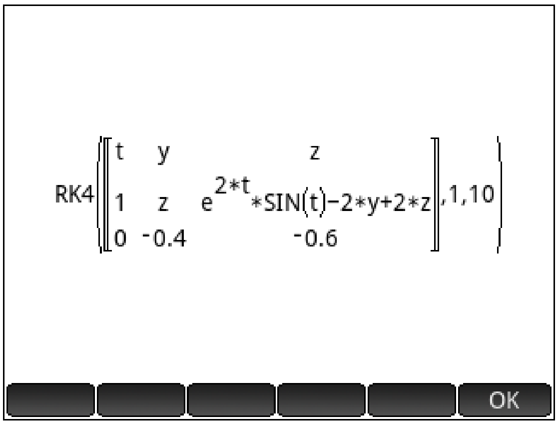
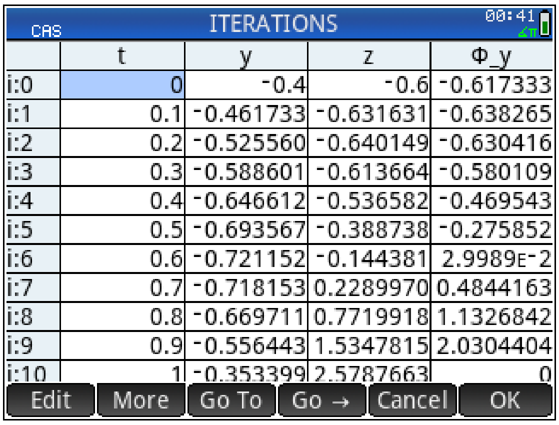


Figura 8. Argumentos para RK4 (ejemplo 3)



	t	y	z	Φ_y
i:0	0	-0.4	-0.6	-0.617333
i:1	0.1	-0.461733	-0.631631	-0.638265
i:2	0.2	-0.525560	-0.640149	-0.630416
i:3	0.3	-0.588601	-0.613664	-0.580109
i:4	0.4	-0.646612	-0.536582	-0.469543
i:5	0.5	-0.693567	-0.388738	-0.275852
i:6	0.6	-0.721152	-0.144381	2.9989E-2
i:7	0.7	-0.718153	0.2289970	0.4844163
i:8	0.8	-0.669711	0.7719918	1.1326842
i:9	0.9	-0.556443	1.5347815	2.0304404
i:10	1	-0.353399	2.5787663	0

Figura 9. Iteraciones usando RK4, ejemplo 3

Autor: Jhonatan Peretz