

HEAT

El programa Heat permite resolver la ecuación de conducción unidimensional del calor utilizando el método explícito (o método de diferencias hacia adelante), método implícito (o método de diferencias hacia atrás) y el método de Crank-Nicolson. Estos métodos se describen en el libro *Métodos numéricos aplicados a la ingeniería, 4ta edición* de Antonio Nieves y Federico Domínguez.

Introducción

La ecuación de conducción de calor en régimen transitorio en una dimensión es la siguiente:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Para resolver esta ecuación diferencial parcial, se necesitan conocer las siguientes condiciones:

$$\text{Condición inicial: } T(x, 0) = f(x) \quad 0 < x < L$$

$$\begin{aligned} \text{Condiciones frontera: } T(0, t) &= g_1(x) \\ T(L, t) &= g_2(x) \end{aligned} \quad t > 0$$

Donde:

- T : Temperatura
- t : Tiempo
- x : Posición
- L : Longitud de la barra
- α : Coeficiente de difusividad térmica

$$\alpha = \frac{k}{\rho \times C_p}$$

- k : Conductividad térmica
- ρ : Densidad
- C_p : Calor específico

Ejecución del programa


1. El programa debe ejecutarse en la ventana HOME (presione la tecla ).
2. En la ventana HOME deberá ingresar el nombre de la función, en este caso: Heat.
Luego presione ENTER para iniciar la ejecución del programa (Fig. 1 y Fig. 2).



Figura 1. Búsqueda del programa



Figura 2. Ejecución del programa

3. La primera ventana del programa Heat solicitará la siguiente información:
 - Método de resolución
 - Coeficiente de difusividad térmica: α
 - Longitud de la barra: L
 - Tiempo máximo: t
 - Paso en el eje x: Δx
 - Paso en el eje t: Δt
 - Condición inicial: $T(x, 0)$
 - Condición frontera 1: $T(0, t)$
 - Condición frontera 2: $T(L, t)$
4. Una vez ingresados estos datos, presione ENTER para dirigirse a la segunda ventana. Aquí se le solicitará información sobre los puntos singulares.
5. A continuación se mostrará el valor del parámetro λ ($\lambda = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$).
6. Presione ENTER para ver la tabla de resultados.

Ejemplo 1

Resolver el siguiente PVF:

$$PVF \begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \\ T(x, 0) = 20^\circ F & 0 < x < 1 \\ T(0, t) = 100^\circ F \\ T(1, t) = 100^\circ F & t > 0 \end{cases}$$

$$\alpha = 1 \frac{ft^2}{h}$$

$$L = 1 \text{ ft}$$

$$t_{\text{máx}} = 1 \text{ h}$$

(Nieves Hurtado & Domínguez Sánchez, 2014).

Solución

Usaremos los siguientes anchos para cada intervalo:

$$\Delta x = 0.25 \text{ ft}$$

$$\Delta t = 0.01 \text{ hrs}$$

1. Seleccionamos el método que aplicaremos para resolver (método explícito).
2. Ingresamos los datos y presionamos ENTER (Fig. 3).



The screenshot shows a software window titled "DATOS" with a blue header bar. Inside, there are several input fields and buttons. The "Método" field is a dropdown menu currently showing "Mét. Explícito". Below it is a field for "α" with the value "1". Then there are two rows of fields: "L: 1" and "t: 1", followed by "Δx: 0.25" and "Δt: 0.01". Below these are three more fields: "U(x,0): 20", "U(0,t): 100", and "U(L,t): 100". At the bottom, there is a section labeled "Seleccione método" with three buttons: "Selecc.", "Canc.", and "OK". The window has a standard operating system title bar with the time "15:41" and some system icons on the right.

Figura 3. Ingreso de datos del ejemplo 1

3. Editamos los puntos singulares (Fig. 4).

- Observe que en el nodo de coordenadas $\langle x = 0; t = 0 \rangle$, la temperatura debería ser 20°F según la condición inicial, mientras que la condición frontera 1 establece que la temperatura debería ser 100°F. Lo mismo sucede con el nodo de coordenadas $\langle x = 1; t = 0 \rangle$.
- Debido a que las restricciones en las condiciones inicial y frontera son intervalos abiertos, elegiremos la media aritmética de las temperaturas sugeridas por la condición inicial (20°F) y la condición frontera correspondiente (100°F). Por tanto, la temperatura en el punto singular es 60°F.

Figura 4. Edición de puntos singulares en el ejemplo 1

4. La calculadora muestra la tabla de resultados (Fig. 5).

RESULTADOS				
	x:0	x:0.25	x:0.5	x:0.75
t:0	60	20	20	20
t:0.01	100	26.4	20	26.4
t:0.02	100	37.152	22.048	37.152
t:0.03	100	44.79104	26.88128	44.79104
t:0.04	100	50.758912	32.6124032	50.758912
t:0.05	100	55.7340447	38.4192860	55.7340447
t:0.06	100	60.0462361	43.9600088	60.0462361
t:0.07	100	63.8650420	49.1076015	63.8650420
t:0.08	100	67.2854448	53.8299825	67.2854448
t:0.09	100	70.3668997	58.1357304	70.3668997
t:0.1	100	73.1512086	62.0497046	73.1512086
t:0.11	100	75.6707746	65.6021859	75.6707746
t:0.12	100	77.9524765	68.8241343	77.9524765
t:0.13	100	80.0195455	71.7452038	80.0195455
t:0.14	100	81.8035335	74.3666331	81.8035335

Figura 5. Tabla de resultados del ejemplo 1

Ejemplo 2

Calcule la temperatura como una función de x y t en una barra aislada de longitud unitaria (en pies), sujeta a las siguientes condiciones inicial y de frontera:

$$\begin{aligned} CI: \quad & T(x, 0) = 50 \times \sin(\pi \times x) \quad 0 \leq x \leq 1 \\ CF1: \quad & T(0, t) = 100^\circ F \\ CF2: \quad & T(1, t) = 50^\circ F \quad t > 0 \end{aligned}$$

$$PVF \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \\ T(x, 0) = 50 \times \sin(\pi \times x) \\ T(0, t) = 100^\circ F \\ T(1, t) = 50^\circ F \end{array} \right.$$

(Nieves Hurtado & Domínguez Sánchez, 2014).

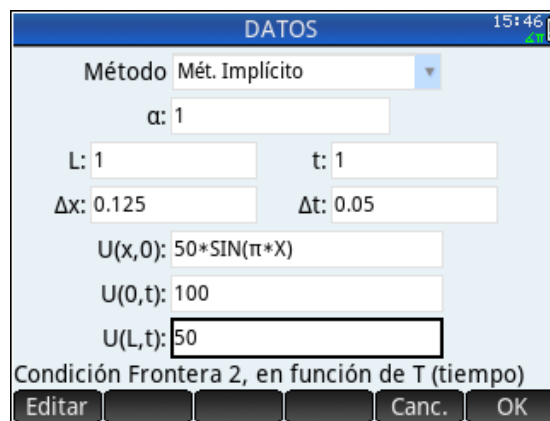
Solución

Usaremos los siguientes anchos para cada intervalo:

$$\Delta x = 0.125 \text{ ft}$$

$$\Delta t = 0.05 \text{ hrs}$$

1. Seleccionamos el método que aplicaremos para resolver (método implícito).
2. Ingresamos los datos y presionamos ENTER (Fig. 6).



DATOS 15:46

Método: Mét. Implícito

α : 1

L: 1 t: 1

Δx : 0.125 Δt : 0.05

U(x,0): 50*SIN(π *X)

U(0,t): 100

U(L,t): 50

Condición Frontera 2, en función de T (tiempo)

Editar Canc. OK

Figura 6. Ingreso de datos del ejemplo 2

3. Editamos los puntos singulares (Fig. 7).

- En este caso, la restricción de la condición inicial es un intervalo cerrado; por tanto, las temperaturas en los puntos singulares estarán determinadas por la condición inicial.

Figura 7. Edición de los puntos singulares en el ejemplo 2

4. La calculadora muestra la tabla de resultados (Fig. 8).

RESULTADOS				
	x:0	x:0.125	x:0.25	x:0.375
t:0	0	19.1341716	35.3553391	46.1939766
t:0.05	100	71.1314188	58.5119772	53.1289851
t:0.1	100	83.4879569	70.8373320	62.0383805
t:0.15	100	87.9080834	77.1974562	68.4743679
t:0.2	100	90.0842790	80.8486191	72.7539476
t:0.25	100	91.3580231	83.1140912	75.5781193
t:0.3	100	92.1635652	84.5788624	77.4519006
t:0.35	100	92.6902475	85.5450833	78.7018630
t:0.4	100	93.0397098	86.1886266	79.5386507
t:0.45	100	93.2731654	86.6192857	80.0999870
t:0.5	100	93.4296333	86.9081628	80.4769665
t:0.55	100	93.5346711	87.1021664	80.7302880
t:0.6	100	93.6052406	87.2325341	80.9005676
t:0.65	100	93.6526722	87.3201667	81.0150464

Figura 8. Tabla de resultados del ejemplo 2

Nota

Para una mejor visualización de los resultados en este programa, recomiendo configurar el tamaño de la fuente principal como “fuente pequeña”.

Autor: David Jhonatan Baez Pérez